試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

Ⓨ

# 数　学　②〔数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学B〕

（100点　60分）

簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入学共通テストの出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

## Ⅰ　注　意　事　項

1　解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。特に，解答用紙の**解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点となることがあります。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

| 出題科目 | ページ | 選択方法 |
|---|---|---|
| 数学Ⅱ | 4～16 | 左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。 |
| 数学Ⅱ・数学B | 17～35 | |

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

4　**選択問題については，いずれか２問を選択し，**その問題番号の解答欄に解答しなさい。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　**不正行為について**

①　不正行為に対しては厳正に対処します。

②　不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は，監督者がカードを用いて注意します。

③　不正行為を行った場合は，その時点で受験を取りやめさせ退室させます。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

## Ⅱ　解答上の注意

**解答上の注意は，裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。**

## Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，符号(−)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-8a$ と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | ● | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| イ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ● | ⑨ | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ウ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ● | ⓑ | ⓒ | ⓓ |

3　数と文字の積の形で解答する場合，数を文字の前にして答えなさい。

例えば，$3a$ と答えるところを，$a3$ と答えてはいけません。

4　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

5　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えなさい。また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}$．$\boxed{\text{クケ}}$ に 2.5 と答えたいときは，2.50 として答えなさい。

6　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

7　問題の文中の二重四角で表記された $\boxed{\boxed{\text{コ}}}$ などには，選択肢から一つを選んで，答えなさい。

8　同一の問題文中に $\boxed{\text{サシ}}$，$\boxed{\boxed{\text{ス}}}$ などが2度以上現れる場合，原則として，2度目以降は，$\boxed{\text{サシ}}$，$\boxed{\boxed{\text{ス}}}$ のように細字で表記します。

# 数　学　II

（全　問　必　答）

## 第１問 （配点　30）

〔１〕

(1) 次の**問題A**について考えよう。

> **問題A**　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{1}{2}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y = \boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる。よって，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2) $p$ を定数とし，次の**問題B**について考えよう。

> **問題B**　関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i) $p = 0$ のとき，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

（数学II第１問は次ページに続く。）

(ii) $p > 0$ のときは，加法定理

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

を用いると

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし，$\alpha$ は

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，$y$ は $\theta = \boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき，$y$ は $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ ，$\boxed{\text{サ}}$ ，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $-1$ | ① $1$ | ② $-p$ |
| ③ $p$ | ④ $1-p$ | ⑤ $1+p$ |
| ⑥ $-p^2$ | ⑦ $p^2$ | ⑧ $1-p^2$ |
| ⑨ $1+p^2$ | ⓐ $(1-p)^2$ | ⓑ $(1+p)^2$ |

$\boxed{\text{コ}}$ ，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $\alpha$ | ② $\frac{\pi}{2}$ |

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 二つの関数$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$について考える。

(1) $f(0)=\boxed{セ}$，$g(0)=\boxed{ソ}$である。また，$f(x)$は相加平均と相乗平均の関係から，$x=\boxed{タ}$で最小値$\boxed{チ}$をとる。

$g(x)=-2$となる$x$の値は$\log_2\left(\sqrt{\boxed{ツ}}-\boxed{テ}\right)$である。

(2) 次の①～④は，$x$にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\boxed{ト}$ ……………………… ①

$g(-x)=\boxed{ナ}$ ……………………… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\boxed{ニ}$ ……………………… ③

$g(2x)=\boxed{ヌ}f(x)g(x)$ ……………………… ④

$\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $f(x)$ | ① $-f(x)$ | ② $g(x)$ | ③ $-g(x)$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①～④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。

花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)～(D)の $\beta$ に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

**太郎さんが考えた式**

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ……………………… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……………………… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……………………… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ ……………………… (D)

(1)，(2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)～(D)のうち，$\boxed{\text{ネ}}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{ネ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ (A) | ① (B) | ② (C) | ③ (D) |

数学Ⅱ

## 第2問 (配点 30)

(1) 座標平面上で，次の二つの2次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ①

$y = 2x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ②

①，②の2次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

- $y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。
- $y$ 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

次の⓪～⑤の2次関数のグラフのうち，$y$ 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$ | ① $y = -3x^2 + 2x - 3$ |
| ② $y = 2x^2 + 2x - 3$ | ③ $y = 2x^2 - 2x + 3$ |
| ④ $y = -x^2 + 2x + 3$ | ⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$ |

$a$，$b$，$c$ を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ における接線を $\ell$ とすると，その方程式は $y = \boxed{\text{カ}}\,x + \boxed{\text{キ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

接線 $\ell$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である。

$a$, $b$, $c$ が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 $\ell$ および直線 $x = \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で囲まれた図形の面積を $S$ とすると

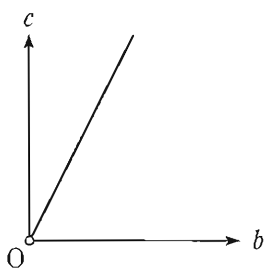
$$S = \frac{ac^{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}\,b^{\boxed{ス}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

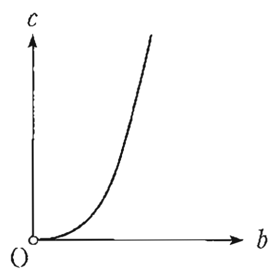
③において，$a = 1$ とし，$S$ の値が一定となるように正の実数 $b$, $c$ の値を変化させる。このとき，$b$ と $c$ の関係を表すグラフの概形は $\boxed{セ}$ である。

$\boxed{セ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

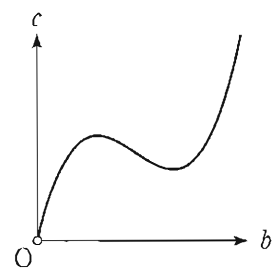
⓪



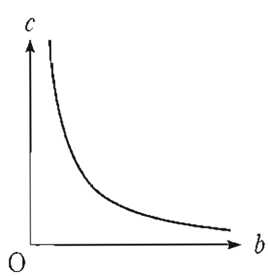

①



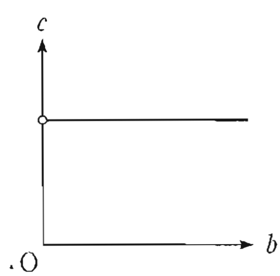

②



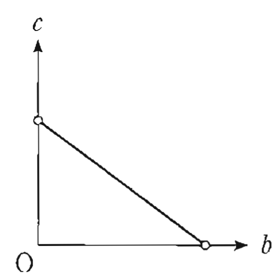

③




④




⑤




（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(2) 座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ………………………… ④

$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑤

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑥

④，⑤，⑥の3次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

- $y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。
- $y$ 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{タ}}\,x + \boxed{\text{チ}}$ である。

$a$，$b$，$c$，$d$ を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ である。

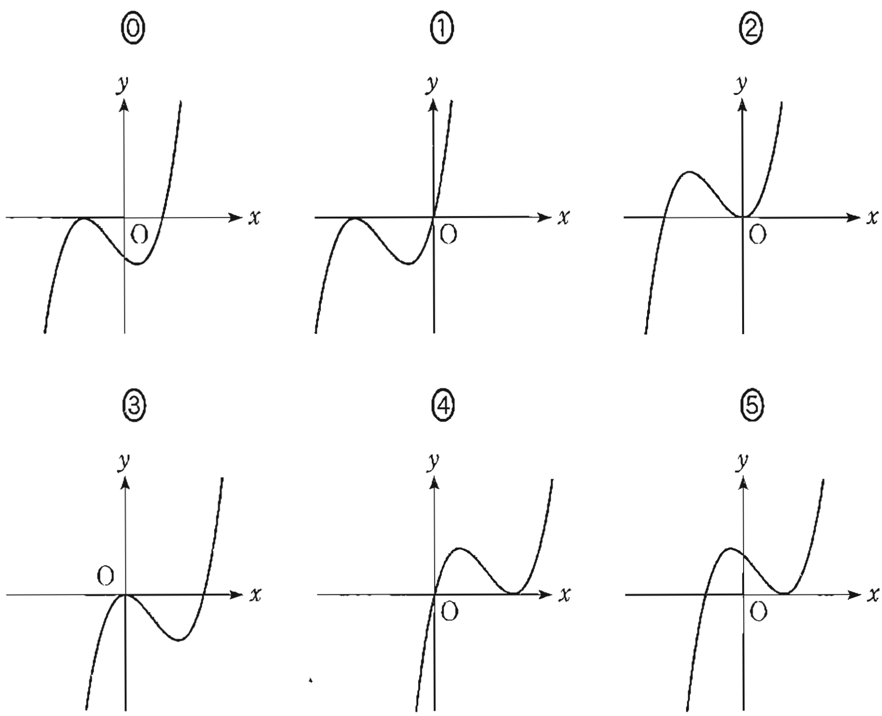
(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=$ $\boxed{\text{テ}}$ $x+$ $\boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。$a$，$b$，$c$，$d$ が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，$x$ が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，$x=\dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



## 第3問 (配点 20)

$a$ は $a > 1$ を満たす定数とする。また，座標平面上に点 M$(2,\ -1)$ がある。M と異なる点 P$(s,\ t)$ に対して，点 Q を，3点 M，P，Q がこの順に同一直線上に並び，線分 MQ の長さが線分 MP の長さの $a$ 倍となるようにとる。

(1) 点 P は線分 MQ を $1 : \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\right)$ に内分する。よって，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$s = \frac{x + \boxed{\text{ウエ}} - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad t = \frac{y - \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2) 座標平面上に原点 O を中心とする半径1の円 $C$ がある。点 P が $C$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を考える。

点 P が $C$ 上にあるとき

$$s^2 + t^2 = 1$$

が成り立つ。

点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，$x$，$y$ は

$$\left(x + \boxed{\text{コサ}} - \boxed{\text{シ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\right)^2 = \boxed{\text{ソ}}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすので，点 Q は $\left(-\boxed{\text{コサ}} + \boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ソ}}$ の円上にある。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) $k$を正の定数とし，直線$\ell : x + y - k = 0$と円$C : x^2 + y^2 = 1$は接しているとする。このとき，$k = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$である。

点Pが$\ell$上を動くとき，点Q$(x,\ y)$の軌跡の方程式は

$$x + y + \left(\boxed{\text{チ}} - \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)a - \boxed{\text{テ}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であり，点Qの軌跡は$\ell$と平行な直線である。

(4) (2)の①が表す円を$C_a$，(3)の②が表す直線を$\ell_a$とする。$C_a$の中心と$\ell_a$の距離は$\boxed{\text{ト}}$であり，$C_a$と$\ell_a$は$\boxed{\text{ナ}}$。

$\boxed{\text{ト}}$の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $a + 1$ | ① $a - 1$ | ② $a$ |
| ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ | ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a + 1)$ | ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a - 1)$ |
| ⑥ $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}a$ | ⑦ $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}a$ | |

$\boxed{\text{ナ}}$の解答群

⓪ $a$の値によらず，2点で交わる

① $a$の値によらず，接する

② $a$の値によらず，共有点をもたない

③ $a$の値によらず共有点をもつが，$a$の値によって，2点で交わる場合と接する場合がある

④ $a$の値によって，共有点をもつ場合と共有点をもたない場合がある

## 第4問 (配点 20)

$k$ を実数とし，$x$ の整式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^4+(k-1)x^2+(6-2k)x+3k$$

とする。

(1) $k=0$ とする。このとき

$$P(x)=x\left(x^3-x+\boxed{\text{ア}}\right)$$

である。また，$P(-2)=\boxed{\text{イ}}$ である。これらのことにより，$P(x)$ は

$$P(x)=x\left(x+\boxed{\text{ウ}}\right)(x^2-2x+3)$$

と因数分解できる。

また，方程式 $P(x)=0$ の虚数解は $\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,i$ である。

(2) $k=3$ とすると，$P(x)$ を $x^2-2x+3$ で割ることにより

$$P(x)=\left(x^2+\boxed{\text{カ}}\,x+\boxed{\text{キ}}\right)(x^2-2x+3)$$

が成り立つことがわかる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(3) (1), (2) の結果を踏まえると，次の**予想**が立てられる。

**予想**

$k$ がどのような実数であっても，$P(x)$ は $x^2-2x+3$ で割り切れる。

この**予想**が正しいとすると，ある実数 $m$，$n$ に対して

$$P(x)=(x^2+mx+n)(x^2-2x+3)$$

が成り立つ。この式の $x^3$ の係数に着目することにより，$m=$ $\boxed{\text{ク}}$ が得られる。また，定数項に着目することにより，$n=k$ が得られる。

このとき，実際に

$$\left(x^2+\boxed{\text{ク}}\,x+k\right)(x^2-2x+3)$$

$$=x^4+(k-1)x^2+(6-2k)x+3k$$

が成り立つことが計算により確かめられ，この**予想**が正しいことがわかる。

(4) 方程式 $P(x)=0$ が実数解をもたないような $k$ の値の範囲は

$$k>\boxed{\text{ケ}}$$

である。

(下 書 き 用 紙)